第１２章　たわみ曲線の応用

１２－１．クロソイド

高速道路での運転では、直線区間から、半径Ｒの円軌道に移る場合に、ゆっくりハンドルを切って、自然に回転半径Ｒの円軌道に乗れば、スムーズに運転できるという話がある。
このような、ある曲率（たとえばゼロ）から出発して、ある曲率に至るまでの、曲線のことを、一般に、緩和曲線と呼んでいる。
緩和曲線の中でも、クロソイドは代表的なものとして知られる。
しかし、本当のところ、クロソイドほどその名を一般に知られ、その反面、クロソイドほど実態を知る人が少ないものも無いのではなかろうか？
実は、この「**一定速度でハンドルを切って、自然に半径Ｒの円軌道に乗ることのできる曲線**」を、ほかならぬ“**「単純ばり」の「たわみ曲線」**”で作ることができるのです。

１２－２.「単純梁、片モーメント」の撓み

単純梁 AB の片側 A にモーメント Ma をかけた場合の、ビームのモーメント分布状態は、A 端が Ma、B 端がゼロの三角形分布となる。
たわみ曲線の曲率は、モーメントに比例するから、モーメントがＡ端で Ma であれば、ある常数をモーメント掛ければ、A 点の曲率が得られる。
また、Ｂ端でモーメントがゼロなら、曲率もゼロ（＝直線）である。
よって、この単純梁の曲率ゼロの B 端を直線に接続し、曲率（1／R）になるような曲げモーメントを与えて円軌道（半径Ｒ）の方に、接続すれば、なめらかな接続という目的を達成できる。
図３６の曲線は、その例を示したものである。

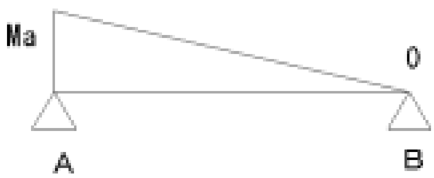

図３６　片側モーメント時のモーメント分布と撓み角

ただし、
そのように出来るためには、曲線と直線の位置関係が、ある条件を満足していなければならない。
たとえば、直線と、円の関係は、次の３つの場合に分けることができる。
１）直線と円が交わる。
２）直線と円が接する。
３）直線と円が交わりも接しもしない。
結論から先に云うと、１）直線と円が交わる場合、緩和曲線を挿入でき、２）直線と円が接する場合、緩和曲線の長さはゼロであり、３）直線と円が交わらない場合は、緩和曲線を挿入できない。
３）の場合は、「ごまかし」といっては語弊があるが、疑似緩和曲線として、接点を共有する半径の大きな円弧をつくれば、緩和曲線を挿入できる。しかし、この場合は、元の発想の、徐々にハンドルを切って、スムーズに円軌道にはいることには程遠い。

徐々にハンドルを切るということは、徐々に曲率が増加することを意味する。（または、徐々に、回転半径がみじかくなることを意味する。）
一方、ビームの曲げモーメントは、曲率に比例する。
切り口の開きの式で見たように、A 端のみにモーメントが作用するなら、A 端の切り口の

開きは 2α、B端ではαとなる。また、A端のモーメントが最大であり、B端のモーメントはゼロ（すなわち、曲率もゼロ）である。
よって、直線、撓み曲線、円、の関係は図３７のようになる。

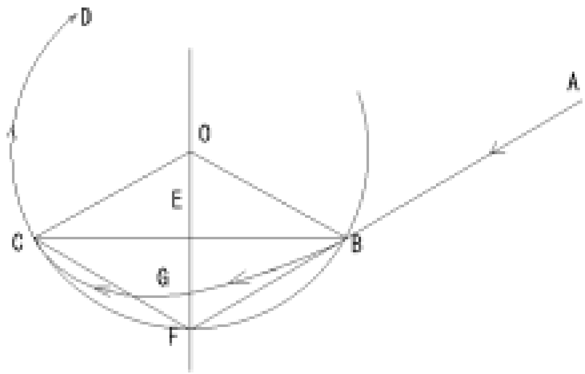

図３７「直線、緩和曲線、円」の関係

ここに、AB は道路の直線区間、BGC はたわみ曲線、CD は円弧である。
一般に、円軌道の方は、円の半径R、円の中心 O の座標が与えられている場合が多く、それに対して、直線が進んで来ることになる。

以下、直線と円と緩和曲線の関係を更に詳しく見る。

１）直線と円が交わる場合、
円と直線が初めに交わる点を B とすれば、直線区間の終わり、つまり、緩和曲線の始まりは B でなければならない。
つぎに、円と直線の第２の交点を F とすれば、この F と円の中心 O を結ぶ線分に、B より垂線をおろし、この線をさらに延長し、円に交わる点を C とすれば、この C が緩和曲線の終わり、つまり、円周の始まりでなければならない。

通常は、以上で決まりとなる。
しかし、もし、直線の終わり B と、円周の始まり C だけが与えられているなら、線分 BC の中点に垂線を立てて、その線上に円の中心 O を作るという手順になる。

なお、たわみ曲線の求め方は次のようにする。
切り口の開きの式と、モーメントの関係は、

$\alpha = (L/6EI)\,M$　で表される。

ここに、既知の量は α、および、L_{BC}　であるから、たとえば、M = 1 とするなら、

$(6EI) = L_{BC}\,M/\boldsymbol{\alpha} = L_{BC}/\boldsymbol{\alpha}$　である。

これにより、いわば、ビーム BC の曲げ強さがわかったことになる。
ビームを分割して、小スパンが長さ J であれば、$(6EI) = L_{BC}/\boldsymbol{\alpha}$　**だから、**

$k = J/6EI = J\boldsymbol{\alpha}/L_{BC}$

BC をビームと見立て、C 点にモーメントM＝１をかけ、切り口の式と、力の和の式を立てれば、各点の変位が求まる。

２）直線と円が交差しない場合、
このばあいは、疑似緩和曲線として、C 点を共通の接点として、大きな円を考える。よって、CO を O の方向に延長した直線と、線分 BC の中点に立てた垂線の交点が、その大きな円の中心 O’となる。疑似緩和曲線のための大きな円、これを「疑似円」と呼ぶとき、「疑似円」の半径をもっとも小さくするには、直線の終わり、つまり、疑似緩和曲線の始まりの点 B から、もとの円 O の中心に向かって線を引き、その線の延長が、初めの円周に交わる点を C として、BC の中点を疑似円の中心 O’とすればよい。

１２－３．計算例

図３７の場合において、
円軌道の半径＝４０m、α＝３０度、(＝0.5236 rad) であるとする。
(このとき、ＢＣ＝69.282 m である。)

ＢＣを単純梁と見立て、図３８のように、Ｂ端にモーメント M = 1 を作用させる。

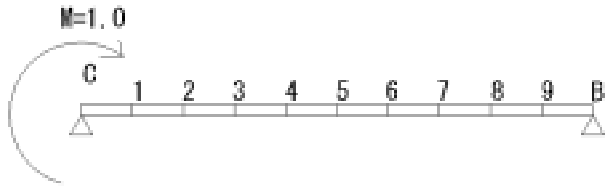

図３８　片側モーメント時の単純バリのたわみ

ただし、梁ＢＣの、開き角度の式に用いる定数、(6EI) は、先に見たように、次のようにして計算できる。

$(6EI)=L_{BC}／\alpha$ 　($= 69.282／0.5236=132.319$)

ビームＢＣを 10 等分して、各部の変位を求める。

$J= L_{BC}／10$ 　($=69.282／10$)

よって、切り口の開き角の定数 k は下記の値となる。

$k = J／(6EI) =(L_{BC}／10) ／(L_{BC}／\alpha) ＝\alpha／10$ 　($=0.05236$)

以下、式の立て方を説明する。

（未知数を設定する）

モーメントとしては、両端のモーメントが既知（$M_c=1.0$, $M_B=0$）であるので、

モーメントの未知数は、M1, M2, M3,……. , M9 の９個、

変位としては、これも、両端の変位がゼロ、で既知だから、

変位の未知数は、d1,d2,d3,………, d9 の９個である。

よって、全部で１８個の未知数があり、式を１８本立てればよいことになる。

ただし、ここでは、計算例なので、念のため、両端の「切り口の開き角」を確認するものとして、未知数 θc と θb を追加し、２０本の式をたてて、計算する。

（式をたてる）

式をたてるには、まず、未知数をヨコに並べるとともに、それをコピーして、縦にもならべる。

縦にならべた未知数を目印に、式を置いてゆく。

縦に並んだ、未知数の、最初の目印は、Ｍ１である。第１の切れ目を「考点」として、切り口の開き角の式を置く。

$$k \times 1.0 + 4kM_1 + kM_2 + (0-2d_1+d_2)／J = 0$$

既知数を右辺に移して、

$$+ 4kM_1 + kM_2 + (-2d_1+d_2)／J = -k$$

第２の目印は M_2 である。

第１の切れ目を「考点」として、切り口の開き角の式を置く。

$$k M_1 + 4kM_2 + kM_3 + (d_1-2d_2+d_3)／J = 0$$

となる。

第３から、第８までは、同じ形の式が続き、

第９の考点で、

$$k M_7 + 4kM_9 + k \times 0 + (d_7-2d_9+0)／J = 0$$

となる。

続いて、見出しが d_1 となるから、d_1 を「考点」として、力の和の式をおく。

$$(M_c - 2M_1 + M_2)／J - Kd_1 = 0$$

荷重は $M_c = 1.0$ のみであり、反力は節の点にはないから、Ｋ＝０である。

既知数を右辺に寄せ、未知数の項を左辺に寄せると、

$$(-2M_1 + M_2)／J = -1.0／J$$

である。

目印のｄ２では、

$$(M_1 - 2M_2 + M_3)／J = 0$$

であり、以下目印の d8 までは、同じ形式の式が続く。

見出しがｄ９では、$M_b = 0$ だから、

$$(M_8 - 2M_9 + 0)／J = 0$$

以上、本来は、ここまででよいが、計算例として、

未知数θc とθb を追加しこれを含めて、方程式を解くこととし、両端の「切り口の開き角」を確認するものとしたので、あらためて、以下の式（切り口の開き角の式）をおく。

Ｃ点を考点として、

$$+ 2kM_c + kM_1 + (-0 + d_1)／J = \theta c$$

上記の式の、M_c は荷重であり、既知数（M_c ＝ 1.0）であるので右辺によせ、θc は未知数であるので、左辺によせる。

$$+kM_1 + (-0 + d_1)/J - \theta c = -2k \times 1.0$$

B 点を考点と場合には、M_b は既知数（M_b = 0）であるので右辺によせ、θb は未知数であるので、左辺によせる。

すなわち、

$$+2kM_b + kM_9 + (-0 + d_9)/J = \theta b$$

より、

$$+kM_9 + (d_9)/J - \theta b = 0$$

となる。

以上で、式はすべて、たてられた。

上記に対応する、左辺のマトリクス（２２ｘ２２）は、以下のようである。

数値を示すと、紙面が混雑するので、記号を示す。

また、一表に示すのが困難であるので、２段に分けて示す。

解をみると、Ｃ端の角度が、1.0472(=60 度)、Ｂ端の角度が 0.5236(=３０度)となっており、

正しい解がえられたことがわかる。

図は、方程式の解に、Ｃ端のモーメント＝1.0 、Ｂ端のモーメント＝０を加えて、グラフで図示したものである。

左辺のマトリクス（その１）

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	d1	d2	d3	d4	d5
M1	4k	k								-2/J	1/J			
M2	k	4k	k							1/J	-2/J	1/J		
M3		k	4k	k							1/J	-2/J	1/J	
M4			k	4k	k							1/J	-2/J	1/J
M5				k	4k	k							1/J	-2/J
M6					k	4k	k							1/J
M7						k	4k	k						
M8							k	4k	k					
M9								k	4k					
d1	-2/J	1/J												
d2	1/J	-2/J	1/J											
d3		1/J	-2/J	1/J										
d4			1/J	-2/J	1/J									
d5				1/J	-2/J	1/J								
d6					1/J	-2/J	1/J							
d7						1/J	-2/J	1/J						
d8							1/J	-2/J	1/J					
d9								1/J	-2/J					
θc	k									1/J				
θb									k					

左辺（その２）

d6	d7	d8	d9	θc	θb
1/J					
-2/J	1/J				
1/J	-2/J	1/J			
	1/J	-2/J	1/J		
		1/J	-2/J		
				-1	
			1/J		-1

右辺のマトリクス

	右辺
M1	-k
M2	0
M3	0
M4	0
M5	0
M6	0
M7	0
M8	0
M9	0
d1	-1.0/J
d2	0
d3	0
d4	0
d5	0
d6	0
d7	0
d8	0
d9	0
θc	-2k
θb	0

	解
M1	0.9
M2	0.8
M3	0.7
M4	0.6
M5	0.5
M6	0.4
M7	0.3
M8	0.2
M9	0.1
d1	6.20321
d2	10.4475
d3	12.9506
d4	13.93
d5	13.6035
d6	12.1888
d7	9.90336
d8	6.965
d9	3.59133
θc	1.0472
θb	0.5236

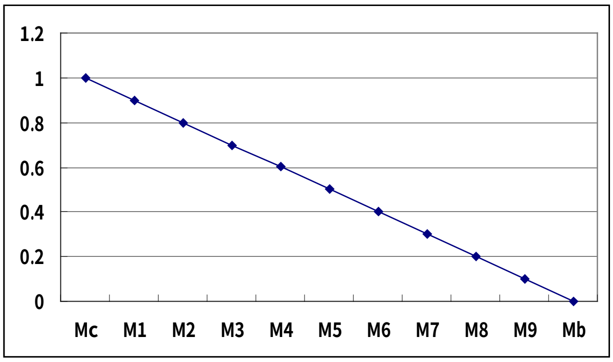

図　モーメント図（単純梁、左モーメント＝１．０）

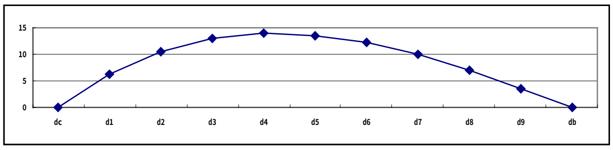

図　　変位図（緩和曲線）

あとがき

文学の分野では、たとえば、源氏物語を分かりやすく解説する人が、幾人も幾人も出ています。
構造解析の分野だって、単に理論を示すだけでなく、わかりやすい解説書を書く人がもっと多く出てよいはずです。
この本が生まれたゆえんは、私が現場技術者であり、構造力学のわかりやすい本の必要性を痛感していたからにほかなりません。
この本の独創性、それは、私の生きている証しです。
初版は、１９９９年の１２月で、自費出版しました。
もともと、この本は、わたしの名刺代わりに、と思って出版した本なんです。
わたしが、もし、大学等の権威者に、共著を持ちかけた場合、わたしは、本のゴーストライターの役に甘んじなければならない。わたしは、そのことを恐れました。
自費出版の結果、１９９９年から今日までの３年間で、わたしの本は、２００冊強売れました。自分で配り歩いたのは、約６０冊です。
余談ですが、この本の発行の費用のすべては、わたしが負担しました。そして、売れた金額の３１％が書店に、６９％がわたしに帰ってくる約束でした。
しかし、わたしが本の発行を依頼したダブリュネットは、経営が苦しく、わたしには、売り上げの入金を、一円も払わないまま、ついに、本年（２００２年夏）倒産しました。
（ダブリュネット社の依頼で、実際の書店に売り出してくれたのは、星雲社で、この会社は、経営は順調です。）
そんなわけで、この本の出版物語は終わりました。
わたしの、本は、いま、ごらんになっているように、ホームページに掲載しています。
ホームページに掲載しているものは、先に出版した本とほとんど内容は変わっていません。

若干の誤字や、ミスを訂正しただけです。
ですから、大学等で教科書または、補強のサブトレーニングに使ってもらって結構です。
しかし、著作権はリザーブされています。
最後に、わたしは、この本を源泉とする、構造解析のプログラムを書き、それを、ホームページ上に公開していることもお知らせします。
掲載したソフトは、５径間連続桁、アーチ、ボックスラーメン、桟橋の地震時挙動、など、設計照査用のソフトとして、また、本の内容の補完として役立ててください。
ＵＲＬは下記です。
http://kunios.cool.ne.jp
http://kuniside.cside.com
上記のサイトからホームページにアクセスし、「照査インデックス」に入ってください。
掲載されている２０本ばかりのソフトは、信じられないほどの小気味よさで、設計の要点

をチェックしたり、設計の方向を示してくれるでしょう。