第４章　「三連法」により構造解析をおこなう

４－１．単純梁

いま、一本の単純梁を四等分して構造を解析する場合について例を示す。
単純梁の両サイドはピンヒンジと同じく、Ｍ１＝０、Ｍ５＝０であり、既知である。よって、Ｍ２，Ｍ３，Ｍ４、の３つのモーメント、及びｄ１，ｄ２，ｄ３，ｄ４，ｄ５の、５つの変位、の、合計８つの未知数があげられる。

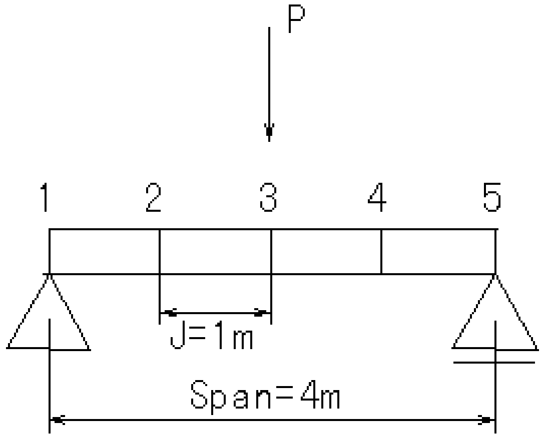

図 8　　単純梁

数値としては、この単純梁は、鉄筋コンクリート製でスパンが４ｍであるとする。
梁の断面は、梁せいが２ｍ、幅０．３ｍであるとする。
そうすると、断面２次モーメントは、

$$I = B H^3 / 12$$

で計算できるから、

$$I=0.3 \times 2^3 / 12 = 0.1 \quad m^3$$

である。
一方、コンクリートのヤング率を、$E = 25\,kN/mm^2 = 25 \times 10^6\,kN/m^2$
とすると、

$$EI = 25 \times 10^6 \times 0.1 = 2.5 \times 10^6 \quad kN/m^2$$

となる。
よって、曲げモーメントに対する撓み角の常数は、次のようになる。

$$k = J/6EI$$

において、　$J = 4m／4等分 = 1m$

$$6EI = 6 \times 2.5 \times 10^6 \quad kN／m^2 = 13.0 \times 10^6 kN／m^2$$

だから、

$$k = J/6EI = 1／(13.0 \times 10^6) = (1／13) \times 10^{-6} (kN／m)^{-1}$$

となる。
（切断された部材の長さを、Ｊとしています）

そのうえで、式は次のように立てることができる。

（角度の開きの式）
考点が NO.2 のとき、考点の両サイドに分割された小ビームがあるから、

$$0 + 4kM_2 + kM_3 + (d_1 - 2d_2 + d_3)／J = 0$$

（なぜなら、Ｍ１＝０、θ＝０）
考点が NO.３のとき、

$$kM_2 + 4kM_3 + kM_4 + (d_2 - 2d_3 + d_4)／J = 0$$

考点が NO.４のとき

$$kM_3 + 4kM_4 + 0 + (d_3 - 2d_4 + d_5)／J = 0$$

角度の開きの式は、切断点について、一つづつ作れるから、全部で３つである。

（力の和の式）
（集中荷重Ｐ＝１０ｋＮが単純梁の中央に作用する場合を想定する。）
考点 NO1 について、ここには荷重がかかっていないから、右辺はゼロ。

$$(-M_1 + M_2)／J \quad - Kd_1 = 0$$

である。（Ｊは切断された部材の長さです。）

支点のバネ常数は極めておおきいものを用いることとする。
いま、$M_1 = 0$であるから、上記の式は次のようになる。

$$M_2／J - Kd_1 = 0$$

考点NO２について、ここには荷重も、支点反力もないから、

$$(M_1-2M_2+M_3)/J+0\times d_2=0$$

$M_1=0$だから、上記は以下のようになる。

$$(-2M_2+M_3)/J+0\times d_2=0$$

考点NO３について、ここには荷重がかかっているが、支点反力はない。

$$(M_2-2M_3+M_4)/J+0\times d_3=-10$$

考点NO４について、ここには荷重も、支点反力もないから、

$$(M_3-2M_4+M_5)/J+0\times d_4=0$$

ただし、$M_5=0$だから、

$$(M_3-2M_4+0)/J+0\times d_4=0$$

考点NO５については、$M_5=0$で、ここには荷重は無いが、支点反力が生じるから、

$$(M_4-0)/J-Kd_5=0$$

力の釣り合いから求まる式は、以上の５個である。

よって、切り口の角度の式が３つ、力の和の式が５つの計８個の式がたてられた。
これに対して、未知数は、M２，M３，M４，ｄ１，ｄ２，ｄ３，ｄ４，ｄ５の８個であるから、解が得られる。
８個の式のなかの８個の未知数を、M２，M３，M４，ｄ１，ｄ２，ｄ３，ｄ４，ｄ５の順番に左から右にならべる。
ただし、未知数がその式のなかに表れていない場合には、その未知数の係数がゼロであると考える。
そのようにして、式のなかの係数をならべると、以下のようになる
（式の並べ方は、横に並べた未知数と同じ順番で、対応する「考点」についての式を、縦にならべます。）

単純ばり	M2	M3	M4	d1	d2	d3	d4	d5
式1	3.08E-07	7.69E-08	0	1	-2	1	0	0
式2	7.69E-08	3.08E-07	7.69E-08	0	1	-2	1	0
式3	0	7.69E-08	3.08E-07	0	0	1	-2	1
式4	1	0	0	-1E+10	0	0	0	0
式5	-2	1	0	0	0	0	0	0
式6	1	-2	1	0	0	0	0	0
式7	0	1	-2	0	0	0	0	0
式8	0	0	1	0	0	0	0	-1E+10

この表の、一行は、一つの式の未知数の係数を、Ｍ２，Ｍ３，Ｍ４、ｄ１，ｄ２，ｄ３，ｄ４，ｄ５という順番にならべたものである。
また、それらが、８行に亘っているのは、８つの式を並べたことを物語っている。
なお、表の中の数字の、例えば、3.08E-07 というのは、コンピューターの表記法で、

$3.08x10^{-7}$

という意味である。
一方、右辺の値を式の順にならべると次のような縦のマトリクスが得られる。

	右辺の値
式1	0
式2	0
式3	0
式4	0
式5	0
式6	-10
式7	0
式8	0

方程式を解いて、未知数の値をうるためには、まず、「左辺の未知数の係数からなるマトリクス」の逆行列を作り、それに「右辺のたての行列」を掛ける。
「左辺のマトリクス」の逆行列は、すでに詳しく説明したとおり、
“ エクセル ” の場合、各ます目に、次のような計算式を書き込むことにより得られる。

＋@Index（＋minverse（＄範囲），ｉ, ｊ）

そうすると、逆行列は、次のようなマトリクスとなる。

0	0	0	0	-0.75	-0.5	-0.25	0
0	0	0	0	-0.5	-1	-0.5	0
0	0	0	0	-0.25	-0.5	-0.75	0
0	0	0	-1E-10	-7.5E-11	-5E-11	-2.5E-11	0
-0.75	-0.5	-0.25	-7.5E-11	-3.5E-07	-4.2E-07	-2.7E-07	-2.5E-11
-0.5	-1	-0.5	-5E-11	-4.2E-07	-6.2E-07	-4.2E-07	-5E-11
-0.25	-0.5	-0.75	-2.5E-11	-2.7E-07	-4.2E-07	-3.5E-07	-7.5E-11
0	0	0	0	-2.5E-11	-5E-11	-7.5E-11	-1E-10

この行列の升目の中の数値、例えば、-7.5E-11 というのは、コンピューターの表記法であり、-7.5x10^{-11} と同じ意味です。

そこで、この逆行列と、右辺の縦の行列をかけることになるが、掛け合わせた結果を表示するには、結果を打ち出すべき升目のなかに、つぎのような計算式をひとつひとつ書き込むことが必要である。

＋@index（＋mmult((＄逆行列の範囲),(＄右辺の行列の範囲)), ｉ ）

ただし、コピー張り付けの機能を十分利用して、手間を省くことができる事は、すでに示した通りである。

各升目に、上記のような式を書き込むと、以下の数字が表れる。

対応する未知数	積（答え）
M2	5
M3	10
M4	5
d1	5E-10
d2	4.23E-06
d3	6.15E-06
d4	4.23E-06
d5	5E-10

これが、逆マトリクスと右辺のマトリクスの積のマトリクスである。
以上で、方程式の解が導かれた。
単純バリの中央における曲げモーメントの値は、Ｍ３の値であるから、１０ｋＮ―ｍとなっている。これは、スパン４ｍの単純梁の中央に１０ｋＮの荷重が作用したのであるから、公式で言えば、Ｍ＝ＰＬ／４＝１０^{kN}ｘ４^{m}／４＝１０ｋＮ−ｍとして得られる結果と同じである。

なお、梁の中央でのたわみは、6.15E-06 (この表記法はコンピューターの表記法で、6.15×10^{-6} と同じ意味) メートルであることがわかる。

４－２．両端固定の梁

いま、両端固定の梁を４等分して応力や変位を計算する場合の例を示す。
梁の断面は、例１の場合と少し変えて、巾：Ｂ＝０．６４メートル、梁せい：Ｈ＝０．５メートルとする。ただしスパンは変えず、４ｍとし、それを４等分して式を立てる。
そうすると、

断面２次モーメント：$I = BH^3/12 = 0.64x0.5x0.5x0.5/12 = 0.006667$ (M^3)

また、コンクリートのヤング率を、$E=2.5x10^7 kN/M^2$ とする場合、梁の曲がり難さの常数ｋは、分割セグメントのスパンＪ＝１ｍだから、以下のようになる。

$k = J/6EI = 1/(6x0.006667x2.5x10^7) = 1.00E-06$（この表記法はコンピューターの表記法で、$1.00x10^{-6}$ と同じ意味）

以上を前提に、式をたてる。

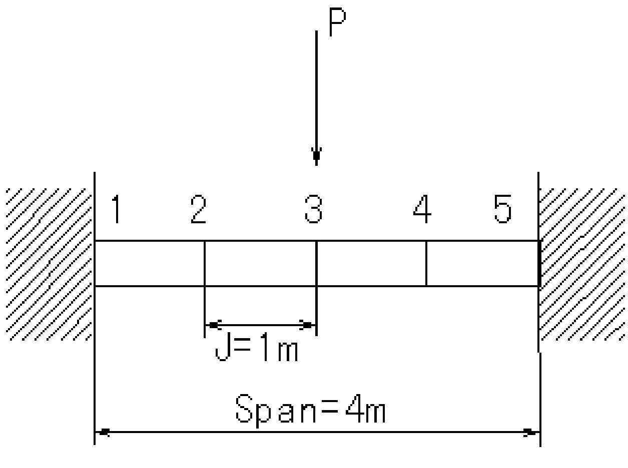

図 9　両端固定の梁

まず、未知数であるが、両端が固定されているので、両端のモーメントＭ１，Ｍ５は未知

数として取り扱われる。
一方、固定された両端の変位ｄ１、ｄ５はゼロと考えて、未知数からはずして解くこともできるが、ここでは、強いバネ常数を与えることにより、変位ｄ１，ｄ５を計算により解くものとする。
そこで、未知数を並べてみると、以下の１０個であることが分かる。
Ｍ１，Ｍ２，Ｍ３，Ｍ４，Ｍ５，ｄ１，ｄ２，ｄ３，ｄ４，ｄ５

ところで、荷重に関しては、この例ではスパン中央に、１０ｋＮが作用しているものとする。

（切り口の開き角の式）
第一の切り口では、一方だけしか梁がないので、切り口の開きの角度は、

$$\theta = 2kM_1 + kM_2 + (-d_1 + d_2)/J$$

で表される。（Ｊは切断された部材の長さです。）

部材は折れていない連続した状態にあり、内部応力が正しく再現できるなら、切っていないのと同じ状態を保つ事ができ、切り口の開きの角度はゼロである。よって、$\theta = 0$
つまり、

$$2kM_1 + kM_2 + (-d_1 + d_2)/J = 0$$

と書ける。
つぎに、第２の切り口について、切り口の開きの角度の式をたてると、考点の両サイドにビームがあるので、切り口の開き角度の式は次のようになる。

$$\theta = kM_1 + 4kM_2 + kM_3 + (d_1 - 2d_2 + d_3)/J$$

しかるところ、部材は連続した状態にあり、内部応力が正しく再現できるなら、切っていないのと同じ状態であり、切り口の開きの角度はゼロである。よって、$\theta = 0$
つまり、

$$kM_1 + 4kM_2 + kM_3 + (d_1 - 2d_2 + d_3)/J = 0$$

と書ける。
以下、同様に、切り口の開きの角度の式を立てると、
第３の切り口について、

$$kM_2 + 4kM_3 + kM_4 + (d_2 - 2d_3 + d_4)/J = 0$$

第４の切り口について、

$$kM_3 + 4kM_4 + kM_5 + (d_3 - 2d_4 + d_5) / J = 0$$

第５の切り口は、第一の切り口と同様に、梁が切り口の片側だけにあるので、

$$kM_4 + 2kM_5 + (d_4 - d_5) / J = 0$$

となる。
ただし、上記の式の中の係数は便宜的に記号を用いているに過ぎず、その値は、すでに設定したとおり、

$k = J/6EI = 1.00E\text{-}06$（この表記法はコンピューターの表記法で、$1.00 \times 10^{-6}$ と同じ意味）
および、Ｊ＝１であり、係数は全て数値で表すことができる。

（Ｊは切断された部材の長さです。）

（力の和の式）

まず、ＮＯ．１の点では、支点のバネ常数を非常に大きな値、例えば、$K = 10^{10}$ 程度とし、式を立てる。ただし、いま、数値を書くと見にくいので、便宜的にＫという記号で示す。

$$+(-M_1 + M_2) / J \quad - K d_1 = 0$$

考点がＮＯ．２の時は、バネ支持が無く、したがって、変位d_2の係数はゼロとなる。

$$+(M_1 - 2M_2 + M_3) / J \quad + \quad 0 \times d_2 = 0$$

考点がＮＯ．３の時は、バネ支持がないが、荷重Ｐがかかっているので、

$$+(M_2 - 2M_3 + M_4) / J \quad + \quad 0 \times d_3 = -P$$

ただし、この例では、Ｐ＝１０ｋＮ 、としたので、

$$+(M_2 - 2M_3 + M_4) / J \quad + \quad 0 \times d_3 = -10$$

考点がＮＯ．４の時は、バネ支持がないし、荷重もかかっていないから、

$$+(M_3\ -2M_4+M_5)/J\quad +\ 0\times d_4=0$$

考点がNO．５の時は、NO．１の時と同様のバネ支持として、

$$+(M_4\ -M_5)/J\quad -Kd_5=0$$

以上で、「切り口の開き角の式」が５個、「力の和＝０」の式が５個の合計１０個の式が立てられた。ただし、Ｊ とは、分割された結果のセグメントのスパンであり、ここでは、両端固定の梁４ｍを４分割したので、Ｊ＝１である。
一方、未知数は全部で１０個だから、方程式の解を得ることができる。

そこで、未知数を、Ｍ１，Ｍ２，Ｍ３，Ｍ４，Ｍ５，ｄ１，ｄ２，ｄ３，ｄ４，ｄ５の順に並べて、それに対応する係数を、式の順番に書き並べると、以下のようになる。
（式の並べ方は、横に並べた未知数と同じ順番で、対応する「考点」についての式を、縦にならべます。）

両端固定	M1	M2	M3	M4	M5	d1	d2	d3	d4	d5
式1	2E-06	1E-06	0	0	0	-1	1	0	0	0
式2	1E-06	4E-06	1E-06	0	0	1	-2	1	0	0
式3	0	1E-06	4E-06	1E-06	0	0	1	-2	1	0
式4	0	0	1E-06	4E-06	1E-06	0	0	1	-2	1
式5	0	0	0	1E-06	2E-06	0	0	0	1	-1
式6	-1	1	0	0	0	-1E+10	0	0	0	0
式7	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
式8	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
式9	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
式1０	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1E+10

マトリクスの要素が、例えば 4E-06 と記されているのは、コンピューター特有の標記法であり、4×10^{-6} と言う意味である。

そこで、上記の左辺の係数のマトリクスの逆マトリクスを作る。
この場合、もとのマトリクスのサイズが１０ｘ１０であるので、逆行列のサイズも１０ｘ１０となる。
逆マトリクスの作り方は、繰り返し説明したとおりである。
この場合、“エクセル”の升目を１０ｘ１０確保し、その升目一つ一つに、次のような式を書き込むことにより得られる。
＋@Index（＋minverse（＄範囲），ｉ,ｊ）
ただし、ｉ,ｊは、逆マトリクスの升目の番地であるが、ｉ,ｊという記号を入れるので

はなく具体の数字を入れる。たとえば、１行目の１列の升目の場所に表示されるべき逆マトリクスの要素を表示させるためには、
＋@Index（＋minverse（＄範囲），１,１）
と書き込む。
「コピー・貼り付け」という機能を利用して、手間を省くためには、あらかじめサフィックスとなるべき数字のマトリクスを別の場所に作っておいて、その升目を指定するテクニックを使う。

逆マトリクスは以下のようになる。
ただし、１０x１０のマトリクスが紙面に収まらないので、半分づつ掲載する。

両端固定	M1	M2	M3	M4	M5
式1	166665.9	104166.3	41666.67	-20832.9	-83332.6
式2	104166.3	72916.47	41666.67	10416.86	-20832.9
式3	41666.67	41666.67	41666.67	41666.67	41666.67
式4	-20832.9	10416.86	41666.67	72916.47	104166.3
式5	-83332.6	-20832.9	41666.67	104166.3	166665.9
式6	-6.2E-06	-3.1E-06	-8.7E-22	3.12E-06	6.25E-06
式7	0.562496	-0.28125	-0.125	0.031252	0.187504
式8	0.5	-8.3E-17	-0.5	-2.8E-17	0.5
式9	0.187504	0.031252	-0.125	-0.28125	0.562496
式1０	6.25E-06	3.12E-06	8.67E-22	-3.1E-06	-6.2E-06

d1	d2	d3	d4	d5
-6.25E-06	0.5624957	0.5	0.1875043	6.25E-06
-3.125E-06	-0.2812521	1.11E-16	0.0312521	3.125E-06
-1.11E-16	-0.125	-0.5	-0.125	-1.637E-16
3.125E-06	0.03125215	1.11E-16	-0.281252	-3.125E-06
6.25E-06	0.1875043	0.5	0.5624957	-6.25E-06
-1E-10	-8.437E-11	-5E-11	-1.56E-11	-3.125E-16
-8.437E-11	-8.438E-07	-1E-06	-4.06E-07	-1.563E-11
-5E-11	-1E-06	-2E-06	-1E-06	-5E-11
-1.563E-11	-4.063E-07	-1E-06	-8.44E-07	-8.437E-11
-3.125E-16	-1.563E-11	-5E-11	-8.44E-11	-1E-10

つぎに、右辺のマトリクスは、縦一列で１０個並んだ状態であり、以下の通りである。

	右辺の値
式1	0
式2	0
式3	0
式4	0
式5	0
式6	0
式7	0
式8	-10
式9	0
式１０	0

そこで、逆行列と右辺の行列をかけて、方程式の解を導く。

この場合の、行列の積は縦一列で１０個並んだ状態のものが得られる。

積を表示するべき升目には次の式を書き込む。

＋@index（＋mmult((＄逆行列の範囲),(＄右辺の行列の範囲))，ｉ）

ただし、各升目に、ｉという記号を書くのではなく、具体の数字、上から何番目か、という数字を書き込む。（書き込む手間を省くには、コピー張り付けの機能を使う。）

そうすると、次表にしめすように、積の値が得られる。

対応する未知数	積（答え）
M1	-5
M2	-1.1E-15
M3	5
M4	-1.1E-15
M5	-5
d1	5E-10
d2	1E-05
d3	2E-05
d4	1E-05
d5	5E-10

これにより、スパン４ｍの両端固定の梁の中央に１０ｋＮの荷重がかかる場合、両端の部分（Ｍ１，Ｍ５に対応）には、－５ｋＮ－ｍのモーメントが生じ、梁中央（Ｍ３に対応）には５ｋＮ－ｍのモーメントが生ずることが分かる。

４－３．弾性支承上の梁

「４－１．単純梁」、「４－２．両端固定の梁」の例を見て、ここに至ったひとなら、“切り口の開きの式”、と、“力の和の式”という道具を使えば、たとえ、検討すべき構造物が整定であろうと不整定であろうと、それらにおかまいなく、解析できることが分かったと思います。
弾性基礎上の梁の場合、「力の和の式」を立てるとき、そこから具体に反力がくる点であれば、バネ常数を与え、そこから反力がこない点、例えば空中の点であれば、バネ常数＝０とします。
「切り口の開きの式」は、ビームの端部がヒンジ（またはフリー）の場合と、拘束されている場合では、その端部において異なりますが、それは
固定端では、ビームが片方にしかないから、$2kM_1+kM_2+0+\cdots$から始まり、
自由端では、端の点のモーメントがゼロだから、自由端の直前のモーメントをM_2とすれば、$4kM_2+kM_3+0+\cdots$となっています。

いま、連続梁の例として、両端がヒンジの、４径間連続梁の場合を示します。
ただし、その支点は弾性的なバネ支承です。
梁の断面の寸法や、梁の長さは、「４－１．単純梁」と同様とします。

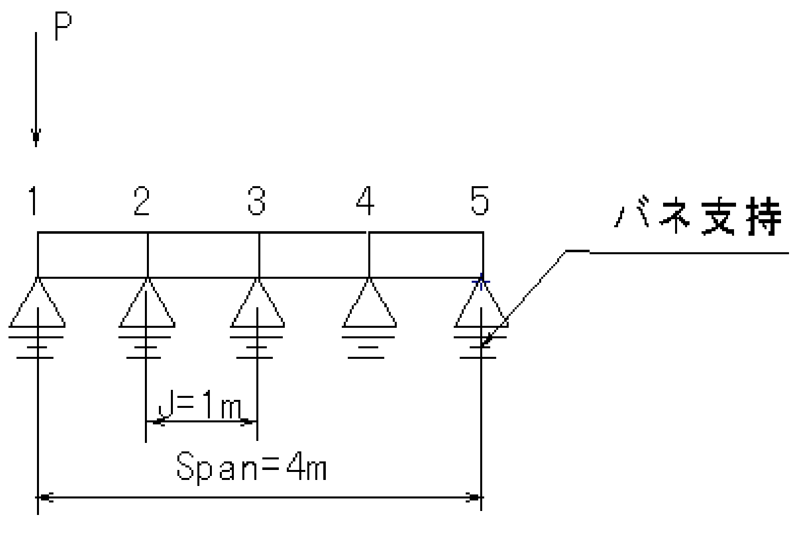

図 10　弾性支承上の梁

両端がヒンジの場合、両端でのモーメントはゼロなので、M_1，M_5はゼロ、つまり、既知数です。

よって、この例の場合、切り口の角度の開きの式は「例１．単純梁」と同じ形式となります。
しかし、「力の和の式」において、それぞれの切り口の場所に、バネ反力（支点反力）が生じているので、単純梁の場合と異なり、それぞれの切り口においてバネ常数を書き込む必要があります。
今、仮に、支点反力を、Ｋ＝$4.0\mathrm{x}10^{6}$ｋＮ／ｍとしてみましょう。そうすると、左辺の係数のマトリクスはつぎのようになります。
（式の並べ方は、横に並べた未知数と同じ順番で、対応する考点についての式を、縦にならべます。）

連続梁	M2	M3	M4	d1	d2	d3	d4	d5
式1	3.08E-07	7.69E-08	0	1	-2	1	0	0
式2	7.69E-08	3.08E-07	7.69E-08	0	1	-2	1	0
式3	0	7.69E-08	3.08E-07	0	0	1	-2	1
式4	1	0	0	-4E+06	0	0	0	0
式5	-2	1	0	0	-4E+06	0	0	0
式6	1	-2	1	0	0	-4E+06	0	0
式7	0	1	-2	0	0	0	-4E+06	0
式8	0	0	1	0	0	0	0	-4E+06

一方、右辺ですが、今度は梁の端部（ＮＯ．１）に荷重Ｐ＝１０ｋＮがかかるものとすると、式４（力の和の式）の右辺に－１０が現れていなければなりません。
そこで、右辺のマトリクスは、以下のようになります。

	右辺の値
式1	0
式2	0
式3	0
式4	-10
式5	0
式6	0
式7	0
式8	0

そこで、左辺の未知数の係数からなるマトリクスの逆行列を作ると以下のようになります。

769428	457981.7	127452.7	0.192357	-0.27022	-0.00477	0.050769	0.031863
457981.7	1020917	457981.7	0.114495	0.026239	-0.28147	0.026239	0.114495
127452.7	457981.7	769428	0.031863	0.050769	-0.00477	-0.27022	0.192357
0.192357	0.114495	0.031863	-2E-07	-6.8E-08	-1.2E-09	1.27E-08	7.97E-09
-0.27022	0.026239	0.050769	-6.8E-08	-1.1E-07	-6.8E-08	-1.9E-08	1.27E-08
-0.00477	-0.28147	-0.00477	-1.2E-09	-6.8E-08	-1.1E-07	-6.8E-08	-1.2E-09
0.050769	0.026239	-0.27022	1.27E-08	-1.9E-08	-6.8E-08	-1.1E-07	-6.8E-08

この左辺の係数の逆行列と右辺の行列を掛けあわせると、未知数の解が得られ、それは次のようになっています。

対応する未知数	積（答え）
M2	-1.923570053
M3	-1.144954128
M4	-0.318631782
d1	2.01911E-06
d2	6.75546E-07
d3	1.19266E-08
d4	-1.26923E-07
d5	-7.96579E-08

以上で解が得られました。
変位の様子をグラフにして見ると次のようになっています。