第６章　「とう角法」でラーメンを解く

６－１．門型ラーメン

図１５のように、片一方の足の長さが２ｍで、他の足の長さが４ｍそして、水平の梁が３メートルの門型ラーメンの梁の部分に荷重がかかっている場合の構造解析をおこなう。

まず、節を決める。
節点としては、時計回りに、地面との固定端、門の角、荷重点、門の角、地面との固定端の５個が考えられる。
（もし、荷重点以外であっても、任意の場所のモーメントなどを解として打ち出したいときは、そこを節（切断点）と見なして未知数の設定をし、式を立てればよい。）

ここでは、未知数として、最小限の例を示すものとし、モーメント（８個）、部材角Ｒ（４個）、部材端の角θ（３個）の例を解説する。

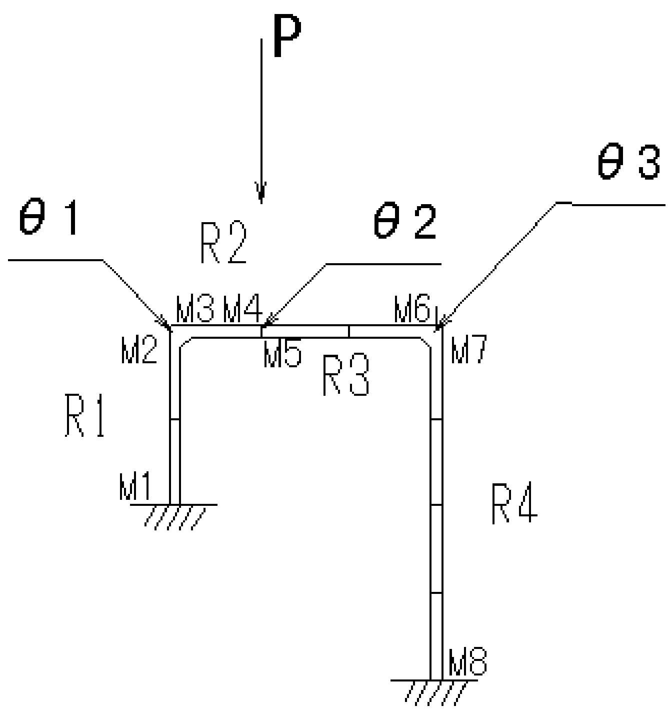

図 15　門型ラーメン

節点には２つの部材が集まっているに過ぎないから、切断面の左と右のモーメントは正負が逆で絶対値が等しいのだが、このことで未知数を減らしたいと思うのは、誰しも考える自然な誘惑ですが、この際、その誘惑を無視します。

（モーメントの式）
切断されたビームの常数を m_1，m_2 ，m_3，m_4 とします。
ただし、$m_1 = 1.5\ EI_1 / J_1$
E：ヤング率、
I_1：断面２次モーメント、
J_1：切断された部材の長さ。
です。
（切断された部材の長さを、筆者はＪと書いています。）

はじめの地面との固定点では、固定点での回転がゼロだから、
$M_1 = 2 m_1 x\ 0 + m_1 x\ \theta_1 - 3 m_1 R_1$
となります。
その向こう側の材端部では、
$M_2 = m_1 x\ 0 + 2 m_1 \theta_1 - 3 m_1 R_1$
横桁の始まりから、荷重点までについては、
$M_3 = 2 m_2\ \theta_1 + m_2\ \theta_2 - 3 m_2 R_2$
$M_4 = m_2\ \theta_1 + 2 m_2\ \theta_2 - 3 m_2 R_2$
荷重点から横桁の終点までは、
$M_5 = 2 m_3\ \theta_2 + m_3\ \theta_3 - 3 m_3 R_3$
$M_6 = m_3\ \theta_2 + 2 m_3\ \theta_3 - 3 m_3 R_3$
横桁の最後の角から、地面までについては、
$M_7 = 2 m_4\ \theta_3 + m_4 \cdot 0 - 3 m_4 R_4$
$M_8 = m_4\ \theta_3 + 2\ m_4 \cdot 0 - 3 m_4 R_4$
となる。

（モーメントの和の式）
そのうえで、節点に集まるモーメントの和がゼロになるので、以下の式が成立する。
$M_2 + M_3 = 0$
$M_4 + M_5 = 0$

$M_6 + M_7 = 0$

（力の釣り合いの式）

水平方向の力の釣り合いを考えると、横桁の下でスパっと切ったとき、横桁が静止している条件として、

「部材１からの水平方向の力」と「部材２からの水平方向の力」の和がゼロでなければならない。

部材が、水平材と鉛直材だけで構成されているから、セン断力（モーメントの差を長さで割ったもの）だけで釣り合いの式を作ることができる。

$(M_1 + M_2) / J_1 + (M_7 + M_8) / J_4 = 0$

同様に、荷重の場所については、両サイドの梁からのセン断力と鉛直方向の力の和がゼロでなければならないから、

$(M_3 + M_4) / J_2 - (M_5 + M_6) / J_3 + P = 0$

（変位の累計の式）

最後に、変位の合計がゼロ、という式を立てる。

まず、横桁の部分で考えると、荷重が加わって水平部材が曲がったあとも、水平部材の左端と右端の高さは、同じ高さのままであるから、

$J_2 R_2 + J_3 R_3 = 0$

柱材に関しても、R_1とR_4について、変位後も「カドからカド」の距離は変位前と変わらないから、

$J_1 R_1 - J_4 R_4 = 0$

である。以上で、１５個の未知数に対して、１５個の方程式が立てられた。

上記の方程式を解くには、次のようにする。

①未知数を左辺に寄せ、既知数を右辺に持って行く。

②未知数を、M_1，M_2，M_3，M_4，M_5，M_6，M_7，M_8 θ_1，θ_2，θ_3，R_1，R_2，R_3，R_4の順に横に並べ、１行ごとに１つの式を当てはめ、対応する場所に係数を書き込み、マトリクスをつくる。

そうすると、以下のようなマトリクスとなる。（式の並べ方は、横に並べた未知数と同じ順番で、対応する「考点」についての式を縦にならべます。）

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	θ1	θ2	θ3	R1	R2	R3	R4	右辺
式1	1	0	0	0	0	0	0	0	-m1	0	0	+3m1	0	0	0	0
式2	0	1	0	0	0	0	0	0	-2m1	0	0	+3m1	0	0	0	0
式3	0	0	1	0	0	0	0	0	-2m2	-m2	0	0	+3m2	0	0	0
式4	0	0	0	1	0	0	0	0	-m2	-2m2	0	0	+3m2	0	0	0
式5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-2m3	-m3	0	0	+3m3	0	0
式6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-m3	-2m3	0	0	+3m3	0	0
式7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-2m4	0	0	0	+3m4	0
式8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	+3m4	0
式9	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
式10	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
式11	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
式12	1/J1	1/J1	0	0	0	0	1/J4	1/J4	0	0	0	0	0	0	0	0
式13	0	0	1/J2	1/J2	-1/J3	-1/J3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-P
式14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+J1	0	0	-J4	0
式15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+J2	+J3	0	0

上記の表に具体の数値を入れれば、方程式の左辺の、未知数の係数のマトリクスが数値で表現できる。

このマトリクスの逆行列をつくり、右辺の縦のマトリクスを右から掛ければ、積のマトリクスが得られる。

積のマトリクスは縦一列に並んでいるが、上から、M_1，M_2，M_3，M_4，M_5，M_6，M_7，M_8，θ_1，θ_2，θ_3，R_1，R_2，R_3，R_4という未知数の解になっている。

具体の数字を入れたマトリクスを掲げると、紙面のなかに収まらないので、省略するが、仮に、

ＥＩ＝４０，０００ｋＮ・m^2

とすると、m_i＝1.5 E I_i／J_iだから、

m_1＝1.5 x 40,000 ／2＝ 30,000

m_2＝1.5 x 40,000 ／1＝ 60,000

m_3＝1.5 x 40,000 ／2＝ 30,000

m_4＝1.5 x 40,000 ／4＝ 15,000

J_iは切断された部材の長さであるから、

1／J_iの値は、

1／J_1＝1/2=0.5

1／J_2＝1/1=1.0

1／J_3＝1/2=0.5

1／J_4＝1/4=0.25

となる。

これらの具体の値を、係数のマトリクスに用い、逆行列を作り、右辺との積をつくると、次の解を得る。

（ただし、右辺のＰの値を１０ｋＮとした。）

M1	-0.366
M2	2.0816
M3	-2.082
M4	-4.594
M5	4.5945
M6	2.0534
M7	-2.053
M8	-1.378
θ1	8E-05
θ2	4E-05
θ3	-5E-05
R1	3E-05
R2	8E-05
R3	-4E-05
R4	2E-05

6－2．小屋型ラーメン

この例の場合は、部材が水平材と鉛直材のみから成るのではなく、傾斜した部材が使用されている。このような場合、セン断力だけで力の釣り合い式をつくるという、層方程式の手法が使えない。

このため、**軸力も使って、オーソドックスに力の釣り合い式を立てる**必要がある。

その際、当然、軸力も未知数に加わる。

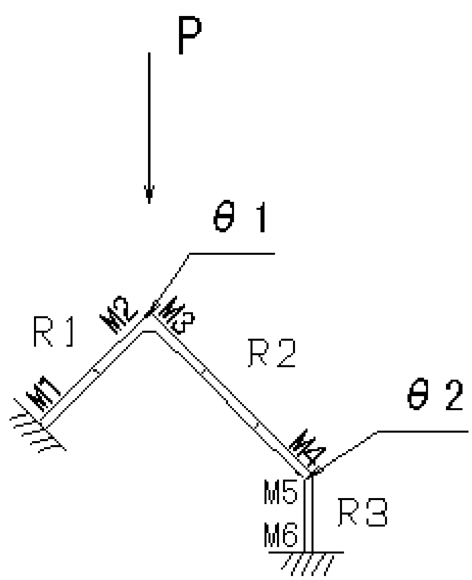

図 16　**小屋型ラーメン**

以下、未知数の名前を付けて行く。

まず、軸力については、荷重のかかる頂点において交差する２部材の軸力をN_1、N_2とし、鉛直部材に生ずる軸力をN_3とする。

それ以外は、門型ラーメンと同様に、

固定端から頂点まで、M_1，M_2，R_1

頂点から庇まで、M_3，M_4，R_2

庇からグランドまで、M_5，M_6，R_3

そして、頂点での回転角をθ_1、庇での回転角をθ_2、とする。

以上の１４個を未知数とする（ただし、後で見るように、セン断力も未知数に加える場合は未知数の数は１７となる）。

以下に、式を立てる。

（モーメントの式）
はじめの地面との固定点では、固定点での回転がゼロだから、
$M_1 = 2m_1 x\ 0 + m_1 x\ \theta_1 - 3m_1 R_1$
その向こう側の材端部では、
$M_2 = m_1 x\ 0 + 2m_1 \theta_1 - 3m_1 R_1$
頂点から庇までについては、
$M_3 = 2m_2 \theta_1 + m_2 \theta_2 - 3m_2 R_2$
$M_4 = m_2 \theta_1 + 2m_2 \theta_2 - 3m_2 R_2$
庇からグランドまでは、
$M_5 = 2m_3 \theta_2 + m_3 x\ 0 - 3m_3 R_3$
$M_6 = m_3 \theta_2 + 2m_3 x\ 0 - 3m_3 R_3$
となる。

（モーメントの和の式）
節の点のモーメント
の和がゼロだから、
$M_2 + M_3 = 0$
$M_4 + M_5 = 0$

（力の和＝０の式）
荷重の点での釣り合いについては

まず、Y 方向のつりあいから、
$N_1 \sin 45 - S_1 \cos 45 + N_2 \sin 45 + S_2 \cos 45 - P = 0$

Ｘ方向の釣り合いから、

$N_1\cos45 + S_1\sin45 - N_2\cos45 + S_2\sin45 = 0$

また、庇を頂点とする釣り合いについては、
Y 方向のつりあいから、
$N_2\sin45 + S_2\cos45 - N_3 = 0$

Ｘ方向の釣り合いは、
$N_2\cos45 - S_2\sin45 + S_3 = 0$

である。

いま、式を立てる都合上、S1,S2, S3 を用いたが、
$S_1=(M_1 + M_2)/J_1$
$S_2=(M_3 + M_4)/J_2$
$S_3=(M_5 + M_6)/J_3$
である。

S1,S2,S3 を代入して、(S1,S2,S3 を消去して)式を簡単にする方法もあるが、ここでは、S_1,S_2 ,S_3 も未知数として扱い、上記の３つの式を連立方程式の構成式に加える。

（変位累計の式）
変位の足し合わせがゼロとなることから、以下の式を得る。

Ｙ方向について、
$J_1R_1 \cos45 + J_2R_2\cos(-45) + J_3R_3\cos(-90) = 0$
Ｘ方向について、
$-J_1R_1 \sin45 - J_2R_2\sin(-45) - J_3R_3\sin(-90) = 0$

以上で、式の数をカウントすると、１７である。これに対し、未知数の数は、１７であるので解が得られる。

方程式の解き方は、まず、未知数の項を左辺に寄せ、既知数を右辺によせる。
つぎに、未知数をならべて、対応する場所に係数を置いて行く。

１行ごとに、１つの式に対させ、マトリクスをつくれば、下記のような１７Ｘ１７の係数のマトリクスができる。
（式の並べ方は、横に並べた未知数と同じ順番で、対応する考点、または関連する事項についての式を、縦にならべます。）

M1	M2	M3	M4	M5	M6	θ1	θ2	R1	R2	R3
1	0	0	0	0	0	-m1	0	3m1	0	0
0	1	0	0	0	0	-2m1	0	3m1	0	0
0	0	1	0	0	0	-2m2	-m2	0	3m2	0
0	0	0	1	0	0	-m2	-2m2	0	3m2	0
0	0	0	0	1	0	0	-2m3	0	0	3m3
0	0	0	0	0	1	0	-m3	0	0	3m3
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	J1cos45	J2cos(-45)	J3cos(-90)
0	0	0	0	0	0	0	0	-J1sin45	J2sin(45)	J3sin90
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/J1	-1/J1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1/J2	-1/J2	0	0	0	0	0	0	0

（マトリクスの全体を示すことができないので、上記は一部分であり、残りを下に示す）

（N1 以下を以下に示す。）

N1	N2	N3	S1	S2	S3	右辺
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
sin45	sin45	0	-cos45	cos45	0	10
cos45	-sin45	0	cos45	sin45	0	0
0	sin45	-1	0	cos45	0	0
0	cos45	0	0	sin45	1	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

上記のマトリクスに実際の数値を入れて、逆行列をもとめ、右辺との積を作れば未知数の解が縦に得られる。

この例において、仮に

$EI = 40,000$ ｋＮ・m^2

であるとすれば、係数の値は以下のようになる。

ｍｉ＝1.5 ＥＩ／Ｊｉ

であり、Ｊｉについては、

Ｊ１＝２（メートル）

Ｊ２＝３

Ｊ３＝１

だから、

ｍ１＝30,000

ｍ２＝20,000

ｍ３＝60,000

となる。

これらの数値を該当する場所にあてはめ、計算すると以下の答えを得る。

	答え
M1	-1.27154
M2	-1.33095
M3	1.330955
M4	2.120938
M5	-2.12094
M6	-4.37206
θ1	-2E-06
θ2	3.75E-05
R1	1.35E-05
R2	-1.1E-05
R3	3.68E-05
N1	4.760173
N2	8.031858
N3	6.493
S1	-1.30125
S2	1.150631
S3	-6.493

ただし、Ｐ＝１０ｋＮとして計算した。

６－４．弾性支承上のボックスラーメン

このレベルまでくれば、かなり高度のレベルにある。

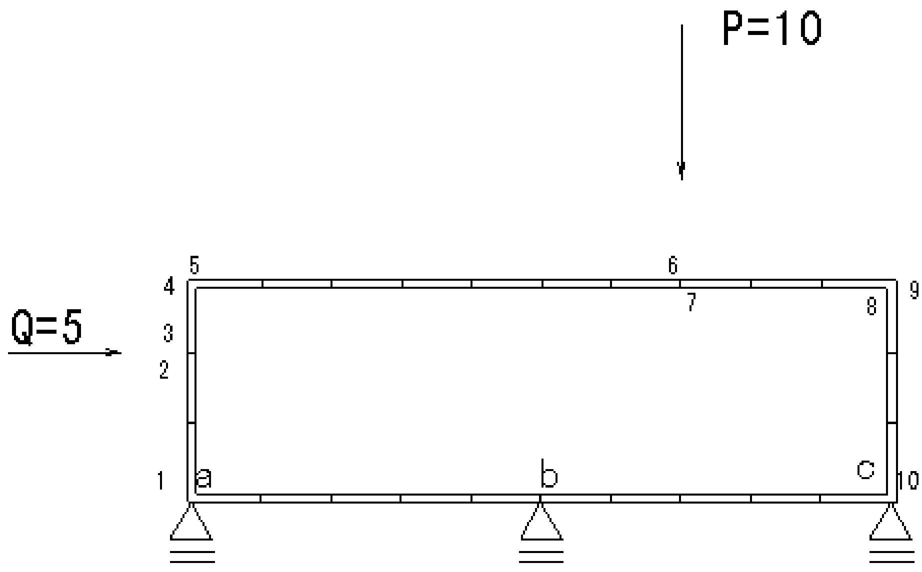

図１８　弾性支承上のボックスラーメン

まず、未知数をカウントしておく。
モーメントについては、

M_{12}、M_{21}、M_{34}、M_{43}、M_{56}、M_{65}、M_{78}、M_{87}、$M_{9,10}$、$M_{10,9}$、Mcb、Mbc、Mba 、Mab、
　の１４個である。

曲げ角については、

θ_{1a}、θ_{23}、θ_{45}、θ_{67}、θ_{89}、θ_{c10}、θ_b　　の７個、

部材角については、

R_{12}、R_{34}、R_{56}、R_{78}、$R_{9,10}$、Rbc、Rab　の７個、

および、変位の一つ、da が未知数としてカウントできる。

以上で必要十分であるが、ここでは、便宜上、余分ではあるが db,dc も未知数に加え、そのかわり、式も２つ加える。
以上で、合計２９＋２＝３１個の未知数を設定する。

早速、式をたてる。

（モーメントの式）

$M_{12} - 2m_{12}\theta_{1a} - m_{12}\theta_{23} + 3m_{12}R_{12} = 0$

$M_{21} - m_{12}\theta_{1a} - 2m_{12}\theta_{23} + 3m_{12}R_{12} = 0$

$M_{34} - 2m_{34}\theta_{23} - m_{34}\theta_{45} + 3m_{34}R_{34} = 0$

$M_{43} - m_{34}\theta_{23} - 2m_{34}\theta_{45} + 3m_{34}R_{34} = 0$

$M_{56} - 2m_{56}\theta_{45} - m_{56}\theta_{67} + 3m_{56}R_{56} = 0$

$M_{65} - m_{56}\theta_{45} - 2m_{56}\theta_{67} + 3m_{56}R_{56} = 0$

$M_{78} - 2m_{78}\theta_{67} - m_{78}\theta_{89} + 3m_{78}R_{78} = 0$

$M_{87} - m_{78}\theta_{67} - 2m_{78}\theta_{89} + 3m_{78}R_{78} = 0$

$M_{9,10} - 2m_{9,10}\theta_{89} - m_{9,10}\theta_{c10} + 3m_{9,10}R_{9,10} = 0$

$M_{10,9} - m_{9,10}\theta_{89} - 2m_{9,10}\theta_{c10} + 3m_{9,10}R_{9,10} = 0$

$M_{cb} - 2m_{cb}\theta_{c10} - m_{cb}\theta_{b} + 3m_{cb}R_{cb} = 0$

$M_{bc} - m_{cb}\theta_{c10} - 2m_{cb}\theta_{b} + 3m_{cb}R_{cb} = 0$

$M_{ba} - 2m_{ab}\theta_{b} - m_{ab}\theta_{1a} + 3m_{ab}R_{ab} = 0$

$M_{ab} - m_{ab}\theta_{b} - m_{ab}\theta_{1a} + 3m_{ab}Rab = 0$

（モーメントの和の式）

$M_{12} + Mab = 0$

$M_{21} + M_{34} = 0$

$M_{43} + M_{56} = 0$

$M_{65} + M_{78} = 0$

$M_{87} + M_{9,10} = 0$

$M_{10,9} + M_{cb} = 0$

$M_{bc} + M_{ba} = 0$

（力の和の式）

荷重Ｑの点において、

（M_{12}＋M_{21}）／J_{12}ー（M_{34}＋M_{43}）／J_{34}＋Q＝0

水平ビームの直下で層方程式
（M_{34}＋M_{43}）／J_{34}＋（$M_{9,10}$＋$M_{10,9}$）／$J_{9,10}$＝0

荷重Ｐの点においての釣り合い
（M_{56}＋M_{65}）／J_{56}ー（M_{78}＋M_{87}）／J_{78}＋P＝0

左サイドの鉛直材で層方程式
ー（M_{56}＋M_{65}）／J_{56}ー（M_{ab}＋M_{ba}）／J_{ab}ーKda＝0

底辺中央での力の釣り合い
（M_{ab}＋M_{ba}）／J_{ab} ー（M_{bc}＋M_{cb}）／J_{bc}ーKdb＝0

右サイドの鉛直材で層方程式
（M_{78}＋M_{87}）／J_{78}＋（M_{bc}＋M_{cb}）／J_{bc}ーKdc＝0

いま、d_b,dc を補助的につかったので、以下の式を加える。
d_b=da＋$J_{ab}R_{ab}$
dc=d_b＋$J_{bc}R_{bc}$

（変位累計の式）
$J_{12}R_{12}$＋$J_{34}R_{34}$＝$J_{9,10}R_{9,10}$
Ｊ56Ｒ56＋Ｊ78Ｒ78＝$J_{ab}R_{ab}$ ＋ $J_{bc}R_{bc}$

以上で２９＋２＝３１個の式を作った。

上記の式の未知数を左辺に寄せ、既知数を右辺に寄せ、左辺の係数のマトリクスを作る。
マトリクスは長くなるので省略するが、すでに何度も見たとおりの手順で、逆マトリクスを作り、右辺のマトリクスを掛け、積を得れば、これが答えである。
数値として、ＥＩ＝４００００ｋＮｍ２、Ｋ＝５００００ｋＮ／ｍを用いて、計算した結果を以下に示す。

	解
M12	-0.72463
M21	0.81467
M34	-0.81467
M43	5.859692
M56	-5.85969
M65	-10.6456
M78	10.64557
M87	12.28075
M910	-12.2807
M109	-2.85432
Mcb	2.854321
Mbc	0.121187
Mba	-0.12119
Mab	0.724626
θ 1a	3.28E-05
θ 23	8.41E-05
θ 45	0.000195
θ 67	-0.00036
θ 89	-0.00028
θ c10	0.00019
θ b	-3.8E-05
R12	5.79E-05
R34	0.000126
R56	0.000237
R78	-0.00051
R9,10	8.05E-05
Rbc	3.48E-05
Rab	-1.1E-05
da	4.47E-05
db	-9.5E-06
dc	0.000165