

## 7 - 2 . 段階法

### 7 - 2 - 1 . 段階法の説明

「一括法」では、どうしても行列のサイズが大きくなりがちであるので、段階的に計算して、できる限り小さい行列で計算を進めようとするものである。

ちなみに、

計算機の能力は、表計算ソフトを使う場合、行列式を解く能力は、せいぜい60 X 60程度であり、マトリクスがそれ以上の大きさになれば、はじめに紹介したソフトの「Scilab」で解かなければ解けなくなる。

また、行列が大きくなるにつれ、解がいつ不安定に成るかの危惧もある。

それでなくても、大きな行列を作るのは、根気がいる仕事であり、疲れるだけでなく、間違いも起こしやすい。

そこで、部材を切断して、パーツごとに計算し、荷重状態を、端部でのモーメントやせん断力に集約して、構造全体を計算したいという欲求が起こってくる。

しかし、段階法が、期待するほど簡単かといえば、そうではなく、筆者の経験からすると、正解に到達するまでかなり苦労する方法である。

段階ごとの作業は以下のようなものである。

#### 第一段階、

第一段階では、構造物を部材やセグメント（小片）に分解し、材端モーメントと材端のせん断力を求める。

その際、部材の両端は固定して、「三連法」で両端部分のモーメントとせん断力を部材ごとに求める。

#### 第二段階

第二段階では、構造物を一括して解かなければならない。

第一段階で求めたモーメントを、節の点で足し合わせると、余ったモーメントができるが、この「余ったモーメントの逆向きのモーメント」を、構造物に、外力として作用させる。

また、両端固定の梁の両端を支えていた、せん断力についても、節の点に「反対向きの力」として、構造物に作用させる。

このようにして「余ったモーメントの逆向きのモーメント」と、「支持力と反対向きの力」を節の点に作用させ、構造物全体を一度に解く。

### 第三段階

第二段階によってビームの端のモーメントが既知となるから、第一段階での、部材端の内部応力と、重ね合わせる。

以上、重ね合わせの結果が、求める解の近似値をあたえるはずである。

### 7 - 2 - 2 . 段階法による計算例

(これは例題であるので、単純な荷重としているが、実際にはどんな荷重状態にも対応できる。)

#### 第一段階

荷重のかかる部材をとりだし、両端固定として端部でのモーメントとせん断力を求める。

1) 左の鉛直部材について

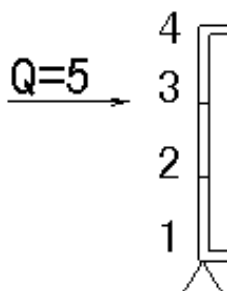


図 19 左の鉛直部材

三連法で、区間を三等分して、式を並べておき、左辺の未知数の係数からなるマトリクスを作成する。

両端固定	M1	M2	M3	M4	d2	d3	Sq1	Sq2	右辺の値
M1	8.3E-06	4.2E-06	0	0	0	1	0	0	0
M2	4.2E-06	1.7E-05	4.2E-06	0	0	-2	1	0	0
M3	0	4.2E-06	1.7E-05	4.2E-06	1	-2	0	0	0
M4	0	0	4.2E-06	8.3E-06	0	1	0	0	0
d2	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
d3	0	1	-2	1	0	0	0	0	-5
Sq1	1	-1	0	0	0	0	1	0	0
Sq2	0	0	-1	1	0	0	0	1	0

ただし、

$EI = 40000$ 、 $Q = 5$ 、 $J = 1$ 、 $k = 4.17E-06$ 、  
を用いた。

上記の逆行列を求め、右辺の行列との積を作る。  
そうすると、以下のような結果を得る。

	解
M1	-1.11111
M2	0.185185
M3	1.481481
M4	-2.22222
d2	8.49E-06
d3	1.23E-05
Sq1	1.296296
Sq2	3.703704

ただし、上記では

$$Sq1 = (M2 - M1) / J$$

$$Sq2 = (M3 - M4) / J$$

の式を、連立方程式に含めて解いた。

三連法で解いたモーメントのうち、右側のモーメントは、反時計回りを正としてあるから、  
時計回りを正とする約束に従うなら、

$$M1 = 1.11111$$

$$M4 = (2.2222) = +2.2222$$

である。

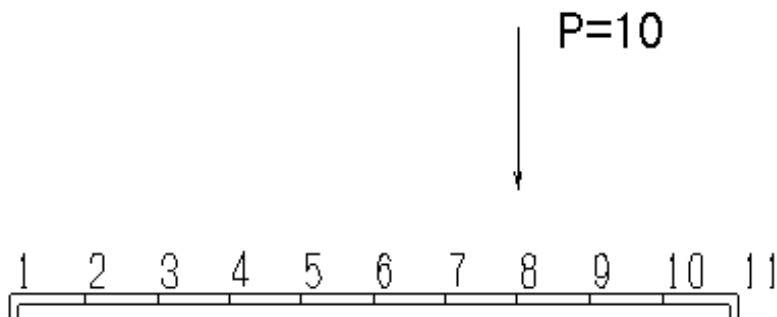


図 20 上の水平部材

上側の水平材についても、同様にせん断力も含めて連立方程式を解いて、次の結果を得る。

M1	-6.3	d2	6.98E-05
M2	-4.14	d3	0.000243
M3	-1.98	d4	0.000466
M4	0.18	d5	0.000684
M5	2.34	d6	0.000844
M6	4.5	d7	0.000891
M7	6.66	d8	0.000772
M8	8.82	d9	0.000474
M9	0.98	d10	0.000151
M10	-6.86	Sp1	2.16
M11	-14.7	Sp2	7.84

ただし、上記は本来縦一列に並んでいるものを、紙面の都合で2列に書き直したものである。

ここでも、時計回りを正と約束すれば、

$$M1 = -6.3$$

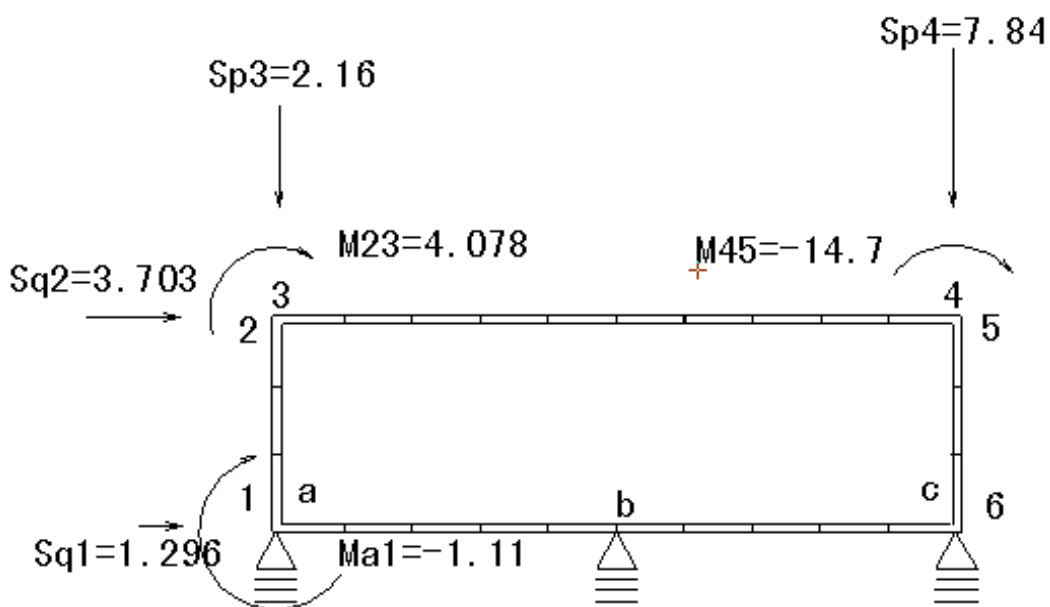
$$M11 = -(-14.7) = +14.7$$

である。

## 第2段階

第2段階では、全体の構造物を一括して解かなければならない。

全体の構造物の場所を示す記号を新しく、図2-1に示す。



ここに、節の点にかかる荷重は、以下のようになる。

まず、モーメントの方向を「時計回り正」に直し、足し合わせる。

$$M_{a1} = 1.11$$

$$M_{23} = (2.222) + (6.30) = 4.078$$

$$M_{45} = (-14.7) = 14.7$$

$$M_{6c} = 0$$

上記は、梁を固定するために、梁に加えられているモーメントであるから、その反作用を構造物に与えるので、節点に与えるべき荷重は、上記の反対向きとなる。

せん断力は既に得られた通りであり、それを書き写すと、

$$S_{Q1} = 1.296$$

$$S_{Q2} = 3.703$$

$$S_{P3} = 2.16$$

$$S_{P4} = 7.84$$

である。

以下に式を作っていく、

まず、底辺について「三連式」を用いて、

(切り口式)

$$2kM_a + kM_b + (d_a + d_b) / J \quad a = 0$$

$$kM_a + 4kM_b + kM_c + (d_a - 2d_b + d_c) / J = 0$$

$$kM_b + 2kM_c + (d_b - d_c) / J \quad c = 0$$

(力の和の式)

$$(M_a + M_b) / J \quad K_{da} = 2.16 (= SP3)$$

$$(M_a - 2M_b + M_c) / J \quad K_{db} = 0$$

$$(M_b - M_c) / J \quad K_{dc} = 7.84 (= SP4)$$

(荷重の値がマイナスなのは、移項したため)

ここに、とう角式と三連法の(インターフェースの式)として、

$$R_{12} + 1 \quad a = 0 \quad (\text{同じ向きで等しいから、移項するとこうなる})$$

$$R_{56} + 6 + \quad c = 0$$

つぎに、フレーム部分について、「とう角法」で式をつくる。

**(モーメントの式)**

$$M_1 - 2m_{12} - 1 \quad m_{12} - 23 + 3m_{12}R_{12} = 0$$

$$M_{21} - m_{12} - 1 \quad 2m_{12} - 23 + 3m_{12}R_{12} = 0$$

$$M_{34} - 2m_{34} - 23 \quad m_{34} - 45 + 3m_{34}R_{34} = 0$$

$$M_{43} - m_{34} - 23 \quad 2m_{34} - 45 + 3m_{34}R_{34} = 0$$

$$M_{56} - 2m_{56} - 45 \quad m_{56} - 6 + 3m_{56}R_{56} = 0$$

$$M_6 - m_{56} - 45 \quad 2m_{56} - 6 \quad 3m_{56}R_{56} = 0$$

**(モーメントの和の式)**

節の点ではモーメントが作用しているので、

$$M_a + M_1 = +1.11 \quad (=M_{a1})$$

$$M_{21} + M_{34} = +4.078 \quad (=M_{23})$$

$$M_{43} + M_{56} = 14.7 \quad (=M_{45})$$

$$M_6 - M_c = 0 \quad (=M_{6c})$$

**(力の和の式)**

水平方向の力の釣り合い式から、

$$(M_1 + M_{21}) / J_{21} + (M_{56} + M_{65}) / J_{56} = 3.703 \quad (=Sq2)$$

**(変位の累計の式)**

撓み角や、撓み量の関係から、

$$dc - da - J_{34}R_{34} = 0$$

$$J_{12}R_{12} - J_{56}R_{56} = 0$$

以上、21の未知数に対して、21の式をつくった。

未知数を順番にならべ、対応する係数を、1つの式について、一行にならべ、マトリクスを作ると、以下のようになる。

マトリクス（一ページに収まらないので分割して示す。）

前半部分

	Ma	Mb	Mc	da	db	dc	a	c	M1	M21	M34	M43	M56	M6
Ma	2k	k	0	-1/J	+1/J	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
Mb	k	4k	k	+1/J	-2/J	+1/J	0	0	0	0	0	0	0	0
Mc	0	k	2k	0	+1/J	-1/J	0	-1	0	0	0	0	0	0
da	-1/J	+1/J	0	-K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
db	+1/J	-2/J	+1/J	0	-K	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dc	0	+1/J	-1/J	0	0	-K	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
M1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
M21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
M34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
M43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	+1	0	0	0	0	0	0	0	+1	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	0
6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+1
R12	0	0	0	0	0	0	0	0	+1/J21	+1/J21	0	0	+1/J56	+1/J56
R34	0	0	0	-1	0	+1	0	0	0	0	0	0	0	0
R56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

マトリクスの後半

	1	23	45	6	R12	R34	R56
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	+1	0	0	0
-2m12	-m12	0	0	+3m12	0	0	0
-m12	-2m12	0	0	+3m12	0	0	0
0	-2m34	-m34	0	0	+3m34	0	0
0	-m34	-2m34	0	0	+3m34	0	0
0	0	-2m56	-m56	0	0	+3m56	0
0	0	-m56	-2m56	0	0	+3m56	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-J34	0
0	0	0	0	0	J12	0	-J56

上記のマトリクスの逆行列をつくり、右辺の縦のマトリクスとの積を作ると、以下のようになる。これが、第2段階における解である。

解	
Ma	0.681411204
Mb	0.062365514
Mc	-3.149574711
da	4.07238E-05
db	-1.03716E-05
dc	0.000169648
a	1.94723E-05
c	-0.000165937
M1	0.429699907
M21	3.777592363
M34	0.300185415
M43	-2.53117133
M56	-12.16882867
M6	-3.149574711
1	1.94723E-05
23	0.000186867
45	-0.000285026
6	0.000165937
R12	6.81089E-05
R34	1.28924E-05
R56	6.81089E-05

### (第3段階)

各部材を取り出して、重ね合わせると、次の値を得る。

場所	第一段階	第二段階	合計
Ma	0	0.681411	0.681411
M12	-1.11111	0.4297	-0.68141
M21	2.222222	3.777592	5.999815
M34	-6.3	0.300185	-5.99981
M43	14.7	-2.53117	12.16883
M56	0	-12.1688	-12.1688
M6	0	-3.14957	-3.14957
Mc	0	-3.14957	-3.14957

これを、既に計算した一括法と比較すると、結果は一致していることがわかる。

両端を拘束し、支点の変位を起こさない条件で、せん断力や曲げモーメントを求め、これを、第二段階の荷重としたのに、どうして同じ結果がえられたのか、むしろ、そのほうが疑問でさえある。